Preview di Limiti di funzioni

- Esercizi svolti-

N.1.- Verificare che (*) $\lim_{x \to 4}(x-1) = 3$.

La funzione *f(x) = x - 1* è definita in *X = R* . In base alla definizione di limite la scrittura (*) è esatta se la disequazione:

1) $\left|(x-1)-3\right| < \varepsilon$ ossia $\left|x-4\right| < \varepsilon$

è verificata $\forall\ \varepsilon > 0$ in un intorno di *x* = 4. Risolvendo il sistema $\begin{cases} x-4<\varepsilon \\ x-4>-\varepsilon \end{cases}$ si vede che la (1) è verificata (fig.1) per $\forall\ x \in\ ]4 - \varepsilon\ ,\ \varepsilon + 4\ [$.

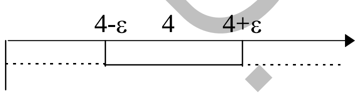


fig.1

Pertanto, scelto $\delta_\varepsilon = \varepsilon$, possiamo affermare che:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta_\varepsilon = \varepsilon > 0 \quad : \quad \forall x \in \left(\left]4-\delta_\varepsilon, 4+\delta_\varepsilon\right[\cap X \right) - \{4\} \quad \left|(x-1)-3\right| < \varepsilon$$

ossia la scrittura $\lim_{x \to 4}(x-1) = 3$ è esatta.

Osserviamo esplicitamente che la semidimensione δ_ε dell'intorno dipende da ε (in questo caso è $\delta_\varepsilon = \varepsilon$), e che quindi al variare di ε si trovano intorni distinti di x = 4, ma per i quali è verificata sempre la disequazione (1).

Ad esempio, per $\varepsilon = 0{,}5 \cdot 10^{-6} = 0{,}0000005$ l'intorno del punto x = 4 è:

$$I = \left]4 - 0{,}5 \cdot 10^{-6} ; 4 + 0{,}5 \cdot 10^{-6}\right[\ = \ ]3{,}9999995;\ 4{,}0000005[\ ,$$

con $\delta_\varepsilon = \varepsilon = 0{,}5 \cdot 10^{-6} = 0{,}0000005$; mentre per $\varepsilon = 0{,}7 \cdot 10^{-7} = 0{,}00000007$ l'intorno del punto x = 4 è:

$$J = \left]4 - 0{,}7 \cdot 10^{-7} ; 4 + 0{,}7 \cdot 10^{-7}\right[\ = \ ]\ 3{,}99999993\ ;\ 4{,}00000007\ [$$

con $\delta_{\varepsilon} = \varepsilon = 0{,}7 \cdot 10^{-7} = 0{,}00000007$.

N.2.- Verificare se la scrittura (*) $\lim_{x\to 1} (3x + 4) = 10$ è esatta.

La disequazione $\left|(3x + 4) - 10\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|3x - 6\right| < \varepsilon$ è verificata per $2 - \frac{\varepsilon}{3} < x < 2 + \frac{\varepsilon}{3}$ che non è un intorno di x = 1. Ne consegue che la scrittura (*) non è esatta.

N.3.- Verificare che la scrittura (*) $\lim_{x\to 2} \frac{1}{\left|x + 1\right|} = \frac{1}{3}$ è corretta.

Occorre risolvere la disequazione:

12) $$\left|\frac{1}{\left|x + 1\right|} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$$

con ε numero reale positivo.
La disequazione (12) è equivalente all'unione delle seguenti due:

13) $$\left|\frac{1}{x + 1} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$$ per x + 1 > 0 ossia x > - 1,

14) $$\left|\frac{1}{-(x + 1)} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$$ per x + 1 < 0 ossia x < -1.

La (13) è equivalente al sistema $\begin{cases} \frac{2 - x}{3(x + 1)} < \varepsilon \\ \frac{2 - x}{3(x + 1)} > -\varepsilon \end{cases}$ ed è verificata per $\frac{2 - 3\varepsilon}{1 + 3\varepsilon} < x < \frac{2 + 3\varepsilon}{1 - 3\varepsilon}$, mentre la (14) non ammette soluzioni.

Pertanto, osservato che le soluzioni della (16) $\frac{2 - 3\varepsilon}{1 + 3\varepsilon} < x < \frac{2 + 3\varepsilon}{1 - 3\varepsilon}$ costituiscono un intorno di x = 2, si deduce che la (*) è esatta.
Osserviamo che possiamo considerare un intorno completo e simmetrico di x = 2 scegliendo:

$$\delta_{\varepsilon} = \min\left\{\frac{9\varepsilon}{1 + 3\varepsilon}, \frac{9\varepsilon}{1 - 3\varepsilon}\right\},$$

ove risulta:

$$\frac{2-3\varepsilon}{1+3\varepsilon}=2-\frac{6\varepsilon}{1+3\varepsilon}-\frac{3\varepsilon}{1+3\varepsilon}=2-\frac{9\varepsilon}{1+3\varepsilon}\quad,\quad\frac{2+3\varepsilon}{1-3\varepsilon}=2+\frac{6\varepsilon}{1-3\varepsilon}+\frac{3\varepsilon}{1+3\varepsilon}=2+\frac{9\varepsilon}{1-3\varepsilon}.$$

N.4.- Verificare che la scrittura (*) $\lim_{x\to 1}\frac{3x}{2x-1}=3$

Occorre risolvere il sistema: 1) $\begin{cases}\frac{3x}{2x-1}<3+\varepsilon\\ \frac{3x}{2x-1}>3-\varepsilon\end{cases}$, ossia:

2) $\frac{3x}{2x-1}<3+\varepsilon \;\Rightarrow\; \frac{3x-(3+\varepsilon)(2x-1)}{2x-1}<0 \;\Rightarrow\; \frac{x(-3-2\varepsilon)+3+\varepsilon}{2x-1}<0$

numeratore: $x(-3-2\varepsilon)+3+\varepsilon>0 \;\Rightarrow\; x(3+2\varepsilon)<3+\varepsilon \;\Rightarrow\; x<\frac{3+\varepsilon}{3+2\varepsilon}$

denominatore: $2x-1>0 \;\Rightarrow\; x>½$

Per stabilire le soluzioni della disequazione (2) costruiamo il seguente prospetto:

	½		3+ε/3+2ε	
N>0				
D>0				
N/D< 0	-	+	-	

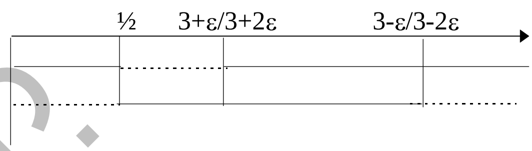
Osserviamo esplicitamente che per stabilire che $1/2<\frac{3+\varepsilon}{3+2\varepsilon}$, basta osservare che se fosse $\frac{1}{2}>\frac{3+\varepsilon}{3+2\varepsilon}$ si avrebbe:

$$\frac{3+2\varepsilon}{2(3+2\varepsilon)}>\frac{2(3+\varepsilon)}{2(3+2\varepsilon)}\Rightarrow 3+2\varepsilon>6+2\varepsilon\Rightarrow 3>6 \text{ il che è assurdo}.$$

Pertanto la disequazione (2) è verificata per $x<1/2$ oppure $x>\frac{3+\varepsilon}{3+2\varepsilon}$.

3) $\dfrac{3x}{2x-1} > 3-\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \dfrac{3x-(3-\varepsilon)(2x-1)}{2x-1} > 0 \quad \Rightarrow \quad 1/2 < x < \dfrac{3-\varepsilon}{3-2\varepsilon}$

Per stabilire le soluzioni del sistema (1) costruiamo il seguente prospetto:



dal quale si trae che è: $\dfrac{3+\varepsilon}{3+2\varepsilon} < x < \dfrac{3-\varepsilon}{3-2\varepsilon}$

Per stabilire che $\dfrac{3+\varepsilon}{3+2\varepsilon} < \dfrac{3-\varepsilon}{3-2\varepsilon}$ basta osservare che se fosse $\dfrac{3+\varepsilon}{3+2\varepsilon} > \dfrac{3-\varepsilon}{3-2\varepsilon}$ si avrebbe:

$\dfrac{3+\varepsilon}{3+2\varepsilon} > \dfrac{3-\varepsilon}{3-2\varepsilon} \Rightarrow (3+\varepsilon)(3-2\varepsilon) > (3-\varepsilon)(3+2\varepsilon) \Rightarrow -3\varepsilon > 3\varepsilon$ il che è assurdo, essendo $\varepsilon > 0$

Pertanto il sistema (1) è verificato nell'intervallo aperto $J = \left(\dfrac{3-\varepsilon}{3-2\varepsilon}, \dfrac{3+\varepsilon}{3+2\varepsilon}\right)$.
Per concludere che la scrittura (*) è corretta bisogna ora verificare che l'intervallo J è un intorno di x = 1, cioè che 1 appartiene a J.
A tale scopo osserviamo che:

a) $1 < \dfrac{3+\varepsilon}{3+2\varepsilon} \Rightarrow 3+2\varepsilon < 3+\varepsilon \Rightarrow 2\varepsilon < \varepsilon$ (il che è assurdo)

e quindi risulta: $1 > \dfrac{3+\varepsilon}{3+2\varepsilon}$;

b) $1 > \dfrac{3-\varepsilon}{3-2\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad 3-2\varepsilon > 3-\varepsilon \quad \Rightarrow \quad -2\varepsilon > -\varepsilon$ il che è assurdo, essendo $\varepsilon > 0$

e quindi risulta: $1 < \dfrac{3-\varepsilon}{3-2\varepsilon}$.

Ne consegue che 1 appartiene all'intervallo aperto J, e la scrittura (*) è corretta.