

Esempi pratici di teoria dei giochi

Pietro Bonfigli

Introduzione

La teoria dei giochi nasce nel ventesimo secolo per analizzare il comportamento di più individui che interagiscono tra di loro in maniera competitiva o cooperativa.

L'interazione tra gli individui nasce dall'idea che un risultato conseguito da ciascuno dipende non solo dalle sue azioni, ma anche dal comportamento degli altri.

Chiaramente questa teoria offre sviluppi molto interessanti e, per certi versi, ambiziosi. Si studiano, ad esempio, nuovi metodi di asta per stabilire la concessione di licenze; si cercano metodi innovativi per l'assegnazione di incarichi politici in base alla forza dei partiti.

Nelle pagine che seguono verranno analizzati esempi pratici di questa teoria, cercando di mostrare le idee che vi sono alla base.

Esempio 1. Duello a tre

Iniziamo con qualcosa di ben conosciuto, il duello a tre.

Supponiamo che vi siano tre rivali Clint, Eli, Lee, i nomi sono ispirati al famoso film di Sergio Leone "Il buono, il brutto e il cattivo" in cui vi è appunto un duello a tre, e che non sia stata concordata nessuna strategia tra le parti. Nel primo round ogni partecipante ha a disposizione un tiro, prima Eli, poi Clint e per ultimo Lee. Al termine del round i sopravvissuti continuano il duello, sempre sparando nell'ordine dato.

Per ogni sfidante il miglior risultato è quello di essere il vincitore, il secondo risultato è quello di essere tra i due sopravvissuti e, chiaramente, la peggiore opportunità è quella venire uccisi.

Eli è un pessimo tiratore, centra il bersaglio solo nel 30% dei casi, Clint è molto più abile raggiungendo l'80% e Lee è un tiratore perfetto che non sbaglia mai.

Vediamo quale possa essere la strategia ottimale per Eli per massimizzare il proprio risultato.

Se Eli spara a Clint e lo colpisce, nel secondo turno Lee spara a Eli colpendolo sicuramente, e Eli ottiene il risultato peggiore

Se Eli spara a Lee e lo colpisce, a quel punto ha soltanto il 20% di salvarsi.

Se invece Eli evita di sparare, lasciando il primo round in mano agli avversari, ottiene certamente il risultato migliore; infatti a quel punto Clint deve decidere a quale avversario sparare, se colpisce Eli è automaticamente ucciso da Lee, se non lo colpisce, Lee può decidere con quale avversario andare al secondo turno e chiaramente sceglierà il più debole, cioè Eli.

Quindi per Clint è più conveniente sparare a Lee, sperando di colpirlo per andare al secondo round con Eli.

Nel secondo round Eli è il primo a sparare e quindi ha comunque il 30% di essere il vincitore.

Questo duello dimostra l'importanza della prima regola:

Guardare avanti e ragionare retrospettivamente

Secondariamente la lezione per i pesci piccoli è che bisogna passare il primo turno per cercare di vincere. Lo si vede ogni quattro anni durante la campagna presidenziale americana. Può essere vantaggioso attendere e salire alla ribalta quando gli altri si sono fatti fuori a vicenda.

Quindi le possibilità di vittoria non dipendono unicamente dalle capacità individuali, ma anche da chi si sfida.

Esempio 2. Spartire una torta

In affari come in politica ci si trova spesso di fronte al problema di dover spartire gli utili complessivi, la cosiddetta torta.

Vi sono due caratteristiche generali della contrattazione da prendere in considerazione. Dobbiamo sapere come vengono fatte le offerte e poi dobbiamo sapere cosa accade se non si riesce a prendere un accordo.

Nella maggior parte dei negozi il negoziante fissa un prezzo e l'acquirente può solo decidere se accettare o andare a concludere l'affare altrove. Nel caso di trattative salariali i sindacati fanno una proposta e la società può accettarla o fare una controproposta.

Una caratteristica comune a tutte le contrattazioni è che il tempo è denaro. Più le trattative si protraggono, più la torta si restringe. Tuttavia è possibile che le parti non raggiungano immediatamente un accordo nella speranza che il costo dei negoziati sia controbilanciato da un risultato più soddisfacente. Se, ad esempio, il mancato accordo sui salari porta ad uno sciopero, la società subisce una perdita negli utili e i lavoratori nei salari. Generalmente tutte le parti impegnate preferiscono arrivare ad un accordo il prima possibile.

Analizziamo adesso un caso di contrattazione tra due parti, A e B, in cui le offerte vengano fatte in maniera alternata e in cui la torta si "scioglia" a ritmo costante.

Supponiamo inizialmente che vi sia una sola mossa; A fa la sua offerta, se B

accetta viene eseguita la spartizione, altrimenti la torta si scioglie e nessuno prende niente. Chiaramente la posizione di A è di netta superiorità; infatti B può accettare la proposta di A che consente comunque di avere qualcosa all'alternativa di non avere niente.

Supponiamo adesso che vi siano due turni prima che la torta sparisca. Se la prima proposta di A non viene accettata, B si trova in una posizione di forza, ma ha a disposizione solo metà torta, quindi il suo miglior risultato è quello di ottenere la metà rimasta. Ragionando retrospettivamente se A offrisse inizialmente il 50% si avrebbe subito un accordo.

Mettiamoci nel caso di avere tre turni a disposizione. Nell'ultimo turno A si trova a dover spartire l'ultimo terzo di torta rimasto, quindi il suo miglior risultato a quel punto è di ottenere un terzo, quindi B sa che se offrisse un terzo nel turno precedente, tenendo per se un terzo, la proposta verrebbe accettata. Ragionando a ritroso A offre a B un terzo come prima offerta e B sa che non potrà comunque ottenere di meglio.

Sembra che l'equa divisione sia sparita, ma mettendoci nel caso di quattro turni la otteniamo di nuovo.

Infatti arrivati all'ultimo turno B ha a disposizione un quarto della torta, e quindi A al terzo turno sa che l'offerta di un quarto, rispetto alla metà rimasta, sarà accettata. Così al secondo turno, quando sono presenti tre quarti di torta, B offrirà un quarto, tenendo metà per se. Chiaramente ragionando retrospettivamente A offrirà metà al primo turno e B accetterà.

In generale se n è pari all' n -esimo passo il giocatore B può al massimo ottenere $\frac{1}{n}$ parti di torta, quindi al passo $n - 1$ A offrirà $\frac{1}{n}$ che corrisponde alla metà del valore della torta a quel momento.

Ragionando retrospettivamente si arriva dunque a dire che la divisione equa è la strategia ottimale.

Nel caso di n dispari si dimostra che A ottiene $\frac{n+1}{2}$ parti e B $\frac{n-1}{2}$ parti e che quindi al crescere di n si arriva comunque ad una situazione di sostanziale parità.

È importante notare che, nonostante siano state prese in considerazione numerose offerte e controproposte accettabili, si può prevedere che sia la prima offerta di A ad essere accettata. Le fasi successive del processo negoziale non entrano mai veramente in gioco. Tuttavia il fatto stesso che tali mosse verrebbero invocate se non si raggiungesse un accordo durante il primo round è fondamentale nel calcolo fatto da A per avanzare una prima proposta sufficientemente accettabile.

Il principio del guardare avanti e ragionare retrospettivamente può determinare il risultato del processo di negoziazione prima ancora che questo abbia inizio. Le manovre strategiche dovrebbero essere progettate al momento stesso dello stabilirsi delle regole.

Esempio 3. Scontro nel preeserale

Supponiamo di voler analizzare le possibili scelte editoriali dei due principali telegiornali italiani, TG1 e TG5.

Supponiamo che entrambi possano scegliere tra due possibili aperture e che queste vadano ad influenzare gli ascolti della serata. Le possibilità sono esemplificate come politica interna e politica estera. Ogni telegiornale ha comunque una base di ascolto fissa e le aperture possono convincere gli indecisi. Riassumiamo la situazione nella matrice

	interno	estero
interno	5 milioni	7 milioni
estero	4 milioni	6milioni

Nella tabella sono riportati gli ascolti del TG1. La prima colonna rappresenta la strategia del TG1 e la prima riga quella del TG5.

Come si può vedere i valori espressi nella prima riga sono maggiori di quelli nella seconda, questo viene tradotto dicendo che il Tg1 ha una *strategia dominante*; infatti per strategia dominante si intende una strategia che consente di avere un ricavo maggiore a parità di strategia impiegata dall'avversario.

Questo non significa che si otterrà il migliore risultato in assoluto, ma che fissata una strategia dell'avversario, la strategia dominante è quella che da i risultati migliori.

Questo ci porta ad enunciare la seconda regola:

Chi è in possesso di una strategia dominante la usi

e viceversa chi si trova a dover affrontare un'avversario con una strategia dominante, parta dal concetto che l'altro la userà. Chiaramente l'esistenza di una strategia dominante semplifica di molto il gioco, nel nostro caso ci si riconduce a

	interno	estero
interno	5 milioni	7 milioni

Chiaramente il TG5 ragionerà nella giusta maniera e sceglierà la politica interna come apertura consentendo al TG1 di avere 5 milioni di telespettatori, contro i 7 della politica estera.

Come vediamo il risultato finale porta ad avere un ascolto inferiore al massimo possibile, è per questo che non dobbiamo limitare la nostra analisi alle sole strategie dominanti.

Esempio 4. Attacchi e contrattacchi

Supponiamo che vi siano due eserciti schierati sulle rive opposte di un fiume e supponiamo che l'esercito dell'ovest possa sparare colpi di cannone in maniera diretta o tentare un tiro a parabola, d'altro canto l'esercito dell'est a tre strategie possibili, può rimanere nella trincea, può cercare di intercettare il colpo o può ancora cercare di scappare in ritirata. Tutti i possibili esiti dello scontro sono rappresentati nella matrice.

	difendere	intercettare	scappare
tiro diretto	3	7	15
tiro a parabola	9	8	10

i numeri esprimono l'entità delle vittime per ogni possibile soluzione.

Chiaramente per quanto detto l'esercito dell'ovest non ha strategie dominanti, ma ci si accorge che i valori nella terza colonna sono più alti degli altri e questo ci porta a dire che l'esercito dell'est ha una *strategia dominata* cioè una strategia che è uniformemente peggiore di qualsiasi altra.

Quindi ci possiamo aspettare che questa strategia non venga scelta, da cui si ottiene la riduzione della matrice alla forma

	difendere	intercettare
tiro diretto	3	7
tiro a parabola	9	8

In questa nuova forma si ha l'emergere di una strategia dominante per l'esercito dell'ovest, rappresentata da un tiro a parabola, quindi per quanto detto ci si aspetta che questa strategia venga usata. Chiaramente la matrice si riduce a

	difendere	intercettare
tiro a parabola	9	8

Da questo ci si aspetta che l'esercito dell'est scelga di intercettare il tiro in modo da limitare il più possibile le perdite.

Questo esempio ci porta ad enunciare la terza regola:

Eliminare progressivamente qualsiasi strategia dominata

Le ultime due regole risolvono molti problemi nelle situazioni di giochi simultanei, ma resta ancora da analizzare il caso in cui non vi siano presenti strategie dominanti o dominate

Esempio 6. Situazione di equilibrio

Analizziamo direttamente la matrice senza nessuna altra introduzione:

	a	b	c
d	(1,8)	(12,1)	(3,0)
e	(4,2)	(0,7)	(10,10)

Il primo valore della coppia rappresenta il guadagno del primo giocatore mentre il secondo rappresenta il guadagno del secondo giocatore.

Da una prima analisi si ottiene che non vi sono strategie dominanti o dominate, quindi non è possibile attuare nessuna riduzione.

Comunque se il primo giocatore attuasse la strategia 'd' si assicurerebbe un guadagno minimo pari ad 1, mentre nell'altro caso si avrebbe un guadagno

minimo pari a 0, è dunque logico aspettarsi che venga scelta la prima strategia. Di conseguenza il secondo giocatore giocherà la strategia 'a' ottenendo il massimo guadagno possibile.

Sembra quindi che si sia ottenuta la soluzione del problema, ma se il giocatore uno applicasse un ragionamento a ritroso e, sapendo che il secondo giocatore sceglierà la strategia 'a', sarà più conveniente per lui scegliere la strategia 'e'.

Ma nulla vieta di fare la stessa cosa al secondo giocatore, portandolo a scegliere come risposta la strategia 'c'. Si viene quindi a creare un ragionamento circolare. È possibile uscire da questo ragionamento o i due andranno avanti all'infinito?

Tutto dipende dalla forma della matrice, in questo caso infatti si ottiene che il punto (10,10) sia il termine del nostro ragionamento circolare, quindi un punto che potremmo chiamare di sostanziale *equilibrio*. Infatti questo è un *punto di equilibrio di Nash*.

Supponiamo che le possibili strategie del primo giocatore siano contenute nell'insieme X e che le strategie del secondo siano nell'insieme Y , se definiamo le funzioni utilità rispettivamente f e g , definiamo punto di equilibrio di Nash la coppia (\bar{x}, \bar{y}) tale che:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, \bar{y}), \forall x \in X$$

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(\bar{x}, y), \forall y \in Y$$

Si ha in pratica una combinazione di strategie dove l'azione di un'avversario è la miglior risposta a quella dell'altro.

Tutto questo ci porta ad enunciare la quarta regola.

Dopo aver eliminato tutte le strategie dominate ed aver selezionato tutte le dominanti, il passo successivo da fare è cercare un equilibrio del gioco

Questi semplici esempi sono serviti per introdurre i concetti elementari della teoria dei giochi. Chiaramente questo articolo è la cosiddetta punta dell'iceberg, ma spero che sia riuscito comunque a far apprezzare le basi di questa affascinante teoria.